Multiplikation und Division von Brüchen

Problematik der Zahlbereichserweiterung

- Eindeutigkeit der Zahldarstellung geht verloren
- Rechnen mit Brüchen erfordert mehrere Schritte
  - Modifikation der Zahldarstellung (Gleichnamig machen, auf einen Bruchstrich schreiben,…)
  - Rechnungen mit natürlichen Zahlen
- Gewohnte Grundvorstellungen gelten nicht mehr
  - Große Zahl (im Nenner) heißt nicht großer Wert des Bruchs
  - Multiplikation macht nicht notwendig größer
  - Division macht nicht notwendig kleiner
  - Dividiert wird, indem man multipliziert (und umgekehrt)
- Bei Kombination mit natürlichen Zahlen werden Konzepte des Rechnens mit denen der natürlichen Zahlen vermischt

Übliche Vorgehensweise

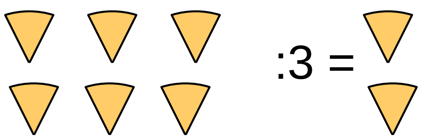
- Rechenregeln werden zumindest teilweise anschaulich mithilfe von Bildern abgeleitet
- Die Rechenregeln werden gelernt
- Das Rechnen mithilfe der Rechenregeln wird zunächst isoliert, später auch vermischt trainiert
- Treten Brüche und natürliche Zahlen gleichzeitig auf, werden letztere in Scheinbrüche verwandelt

$$\frac{6}{7} : 3 = \frac{6}{7} : \frac{3}{1} = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\cancel{6} \cdot 1}{7 \cdot \cancel{3}} = \frac{2 \cdot 1}{7 \cdot 1} = \frac{2}{7}$$

Zentrale Ideen

- Operationen mit Brüchen werden konsequent mittels Handlungen bzw. Bilder erarbeitet
- *Diese anschaulichen Vorstellungen* werden trainiert (Produktion und Interpretation von Bildern) und insbesondere wird permanent auf diese zurückgegriffen
- Rechenregeln
  - werden nicht explizit als zu lernende Merksätze notiert
  - entstehen als individuelle Schülerkonzepte aus der Verkürzung anschaulicher Vorgehensweisen
- Umweg über Scheinbrüche ist hierbei überflüssig

$$\frac{6}{7} : 3 = \frac{2}{7}$$



- Flexibilität in Interpretation und Schreibweise wird angestrebt

$$\frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \text{ von } 3 = 3 : 4$$

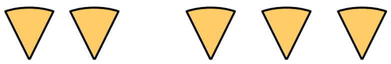
Überblick

Bruchbegriff

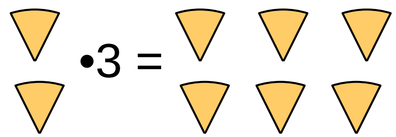
1 Ganzes : 4 •3 ⟷ 3 Ganze : 4

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 3\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 3:4 = \frac{1}{4}\text{ von } 3$$

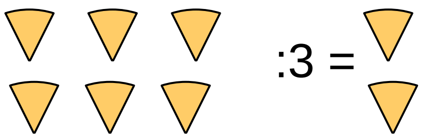
Rechnen wie mit nat. Zahlen (Quasikardinal)



$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$$



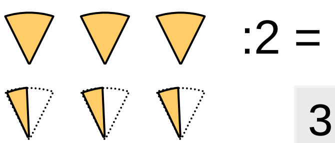
$$3\cdot\frac{2}{7}=\frac{6}{7} \qquad \frac{2}{7}\cdot 3=\frac{6}{7}$$



$$\frac{6}{7}:3=\frac{6:3}{7}=\frac{2}{7}$$

Problematischere Rechnungen:

Division durch Teilen
der einzelnen Bruchstücke:



$$\frac{3}{7}:2=\frac{3}{7\cdot 2}$$

Interpretation der Multiplikation als Bruchteilbildung: $\frac{2}{3}\text{ von } 5=\frac{2}{3}\cdot 5$

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{5}\text{ von }\frac{2}{3}=\frac{2}{3}:5\cdot 4=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}$$

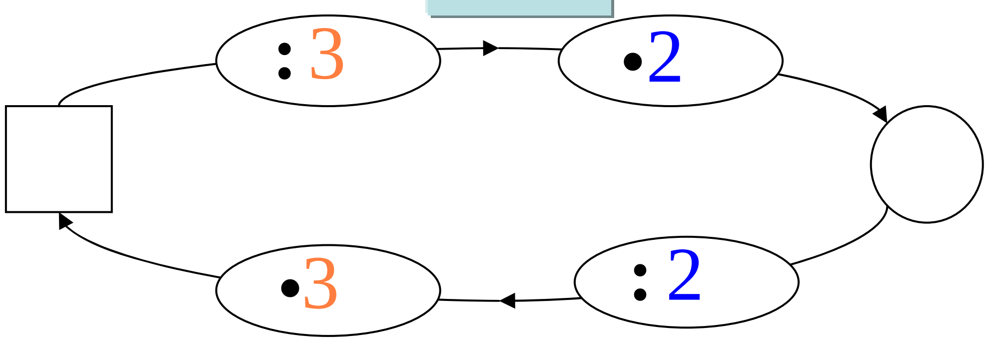
Division durch Bruch

Übliche Konzepte

Division als Umkehrung der Multiplikation

$$\square \cdot \frac{2}{3} = \bigcirc \qquad \bigcirc : \frac{2}{3} = \square$$

$$\cdot \frac{2}{3}$$



$$: \frac{2}{3} \triangleq \cdot \frac{3}{2}$$

Analogisieren: Division analog der Multiplikation?

$$\frac{4}{15}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4\cdot 2}{15\cdot 3}\xrightarrow{\text{Analogisieren}}\frac{4}{15}:\frac{2}{3}=\frac{4:2}{15:3}=\frac{2}{5}$$

Prüfung, ob dies vernünftig erscheint:

Umkehrung
Der Multiplikation

$$\frac{5}{7}=\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{3}:\frac{2}{3}=\frac{5\cdot 2}{7\cdot 3}:\frac{2}{3}=\frac{5\cdot 2:2}{7\cdot 3:3}=\frac{5}{7}$$

Enthaltensein

Wenn Division nicht möglich?

Kernidee: Anpassen der
Darstellung sprich Erweitern

$$\frac{5}{7}:\frac{2}{3}=\frac{5:2}{7:3}=\frac{5\cdot 3\cdot 2:2}{7\cdot 2\cdot 3:3}=\frac{5\cdot 3}{7\cdot 2}$$

Division als Aufteilen bzw. Enthalten sein

Interpretationen der Division „12 : 4 = 3“ :

Verteilen: An 4 Kinder werden 12 Nüsse gerecht verteilt. Jeder bekommt 3 Stück.

Aufteilen: 12 Nüsse werden in 4er-Portionen aufgeteilt. 3 Kinder können damit beschenkt werden. Allgemeiner formuliert: Die 4 passt 3mal in die 12.

Division durch Bruch kann nur als Aufteilen sinnvoll interpretiert werden!

$$3 : \frac{1}{2} = 6$$

Z.B.: Wie oft ist ein halber Liter in 3 Litern enthalten?

Division als Aufteilen bzw. Enthalten sein

Ableitung der Regel an Beispielen:

Wie oft ist 1/3 in 1 enthalten? $1:\frac{1}{3} = 3$ 3 mal!

Wie oft ist 1/3 in 4 enthalten? $4:\frac{1}{3} = 4 \cdot 3$ 4 mal so oft!

Wie oft ist 2/3 in 4 enthalten? $4:\frac{2}{3} = 4 \cdot 3 : 2 = 4 \cdot \frac{3}{2}$ Halb so oft wie 1/3!

Neue Erfahrung, Quotient kann größer als Dividend werden, leicht einsichtig!

Divisionsregel mittels Permanenzreihe

$$\frac{3}{2} : 100 = \frac{3}{2 \cdot 100} = \frac{3}{200}$$

$: 5$ $\qquad \cdot 5$

$$\frac{3}{2} : 20 = \frac{3}{2 \cdot 20} = \frac{3}{40}$$

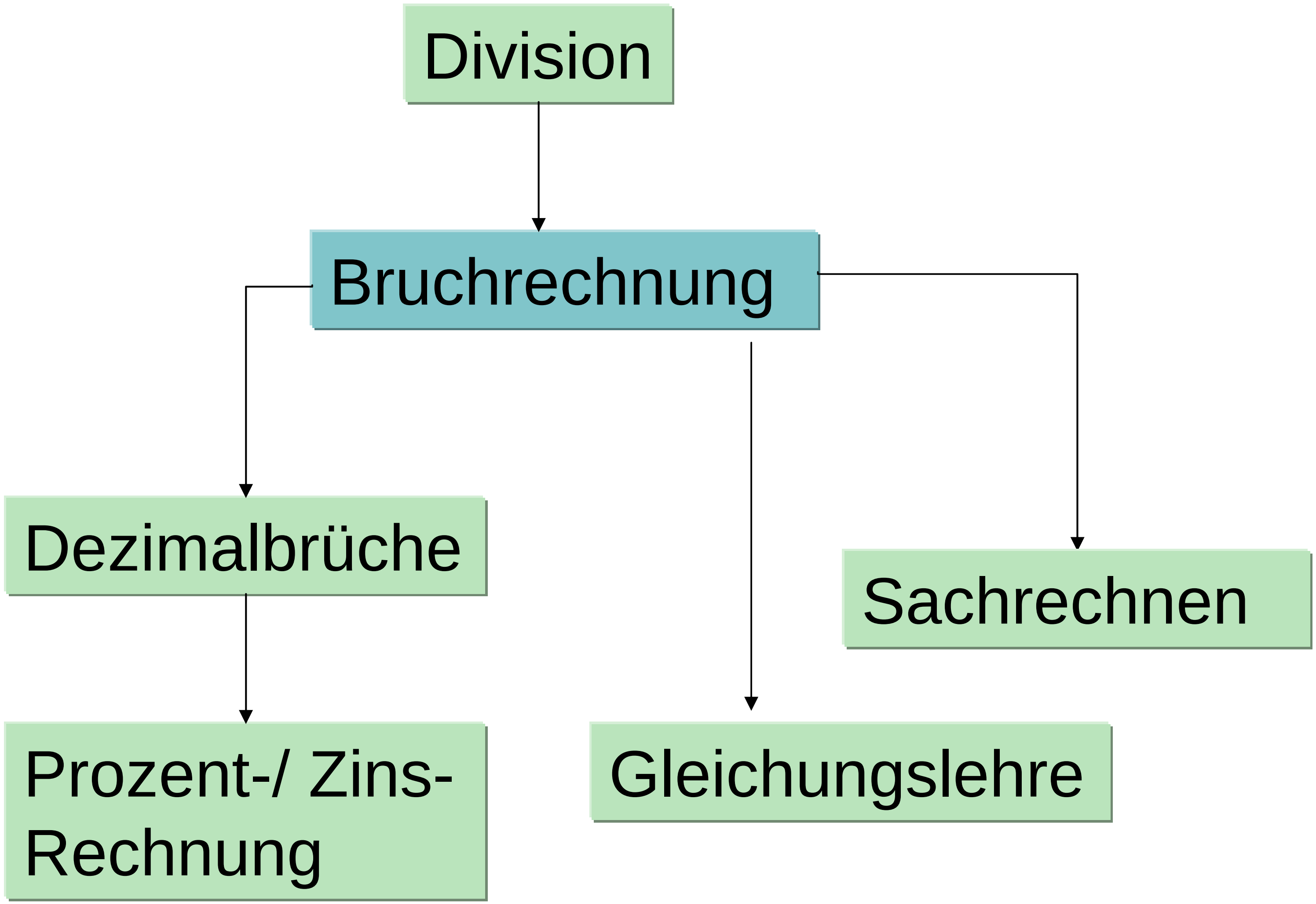
$: 5$ $\qquad \cdot 5$

$$\frac{3}{2} : 4 = \frac{3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}$$

$: 5$ $\qquad \cdot 5$

$$\frac{3}{2} : \frac{4}{5} = ? \; \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}$$

Bezüge zu anderen Stoffgebieten



Division

- Neben Verteilen auch Aufteilen als Interpretation der Division (Wichtig für Division durch Bruch; Könnte bereits zur Bildung des Bruchbegriffs in einfachen Anwendungssituationen propädeutisch die Division durch Bruch vorbereiten)
- Halbschriftliches Dividieren
- Schriftlich (Vorstellung als Verteilen mit Rest und Umwechseln der Reste aber auch Vorstellung als Aufteilen kann z.B. durch Montessorimaterial erreicht werden)

Auswendig zu wissende Bruch-Dezimalbruch-Prozent-Beziehungen

- mindestens:
  - ½, Drittel-, Viertel-, Fünftel- und Zehntel-Reihe
    - Wissen, dass 1% im Kreismodell 360°:100=3,6° entspricht
- optimal:
  - 1/8 = 0,125 weitere Achtel-Brüche lassen sich leicht berechnen
    - Ausgehen von ¼-Reihe
  - 1/7 = 0,14 Bezug zu π

Weitere Gedanken zur Bruchrechnung

Stützpunkte in mentalen Bildern

- Je nach Modell verschiedene Stützpunkte
  - Kreismodell
    - ½; ¼; ¾; 1/3; 2/3
    - 1/6 ergibt sich dann z.B. als ½ -1/3
  - Streifenmodell
    - ½, ¼; ¾; 1/10-Reihe
- Mentale Stützgrößen gibt es feste, wie z.B. ½ , und schrittweise erzeugte wie z.B. 7/8
- Wichtige Übungen sind Skizzen
  - 7/8: Hälfte wäre 4/8, also mehr, genauer 3/8 mehr..
  - auch einfache mentale Übungen z.B. „6/11 knapp mehr als die Hälfte“